

ラケットのスイートスポット（COP）

ラケットのスイートスポット（sweet spot）を外さないように打ちましょう。スイートスポットを外したからいい球を打てなかった。というようなことをよく耳にします。でも、スイートスポットって何でしょう？ 今回はスイートスポットについて考えてみます。

参考文献1によると、スイートスポットは一つではなく、次の三つがあるようです。

- ☆ スイートスポット1：腕が受ける衝撃が最小（COP：center of percussion）
- ☆ スイートスポット2：ラケットの振動が最小（node）
- ☆ スイートスポット3：ボールのパワーが最大

グリップにほとんど抵抗がなくいいショットをすることがたまにあります。これはスイートスポット1に当たったのでしょう。しかし、スイートスポット2と3は、自分の感覚としては正直よく分かりません。ここでは、腕が受ける衝撃が最小になるスイートスポット（COP）について力学的に考察を行っていきましょう。

1. スイートスポット（COP）

図1のように、フェイスに平行で、グリップを握った部分の中心部（点O）を通る軸を回転中心として、角速度 ω_0 で振り出したラケットが、回転中心軸から距離 r の点Pに当たったボールの衝撃による力積 Δp_1 （注1参照）により角速度が ω になったとします。なお、ラケットの質量を M 、回転中心軸からラケットの重心までの距離を L_G 、フェイスに平行で重心を通る軸まわりの慣性モーメントを I_G とします。

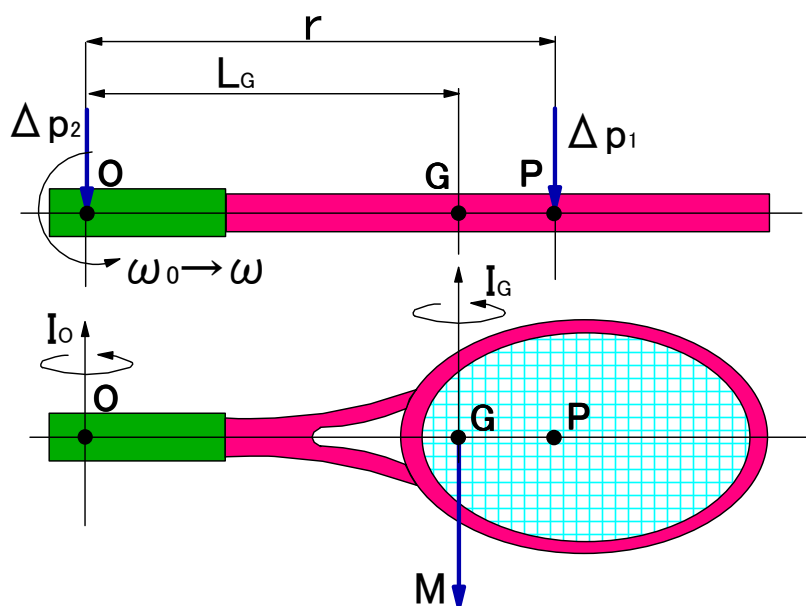


図1 ラケットの回転

【注 1】

力積とは力の大きさと力が働く時間の積です。他の物体の運動量をどれだけ変化させるかを表します。質量 m の質点を考えると、時刻 t_1 , t_2 における、その質点の運動量の変化と質点に働く力の関係は次のように表されます。

$$I = mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

ここで、 I を力積といいます。 v_1 は時刻 t_1 での質点の速度、 v_2 は時刻 t_2 での質点の速度、 F は質点に働く力です。

ラケットの重心の速度は衝撃前は $L_G \omega_0$ であり、衝撃後は $L_G \omega$ になります。また、方向はフェイスに垂直でボールによる衝撃と反対方向です。したがって、運動量の原理から次式が得られます。

$$ML_G \omega - ML_G \omega_0 = (-\Delta p_1) + (-\Delta p_2) \quad (1)$$

平行軸の定理からグリップの点 O まわりの慣性モーメント I_O は次式で表されます。

$$I_O = I_G + ML_G^2 \quad (2)$$

角運動量の原理から次の関係が得られます。

$$I_O \omega - I_O \omega_0 = (I_G + ML_G^2) \omega - (I_G + ML_G^2) \omega_0 = r \cdot (-\Delta p_1) \quad (3)$$

式(1)から次式が得られます。

$$\Delta p_2 = -ML_G(\omega - \omega_0) - \Delta p_1 \quad (4)$$

式(3)から次式が得られます。

$$\omega - \omega_0 = -\frac{r \Delta p_1}{I_G + ML_G^2} \quad (5)$$

式(5)を式(4)に代入して次式が得られます。

$$\Delta p_2 = \left(\frac{ML_G r}{I_G + ML_G^2} - 1 \right) \Delta p_1 \quad (6)$$

式(6)から反力による力積 Δp_2 が零になるのは次の場合であることが分かります。

$$\frac{ML_G r}{I_G + ML_G^2} - 1 = 0 \quad \therefore r = \frac{I_G}{ML_G} + L_G \quad (7)$$

したがって、回転中心軸からの距離が式(7)を満足する点にボールが当たった場合は、ラケットのグリップにはなんら衝撃がかからずに気持ちよくボールが飛んでいくこととなります。すなわち、この点がスイートスポット (COP) ということになります。

式(7)にはグリップを握った点 (点 O) から重心までの距離 L_G が含まれています。ということは、グリップのどこを握るかによってスイートスポット (COP) の位置は変わるこ

とになります。また、式(7)から分かるように、スイングスピードやショットの種類（トップスピンの、スライス、サーブ、ボレーなど）によって変わることはなく、ラケットの質量、慣性モーメントと、握る位置によってのみ変化します。

では、自分のラケットについてスイートスポット（COP）の位置を探してみましょう。フェイスでボールを弾ませながらほぼこの辺がスイートスポットかなって分かりますよね。それを数学的に探してみようというわけです。

2. COPを知るために必要な諸元

式(7)からスイートスポット（COP）を求めるには、ラケットの質量、重心位置および重心まわりの慣性モーメントを知る必要があります。

2.1 質量

ラケットの質量は秤に載せれば容易に分かりますね。

2.2 重心位置

ラケットは図 2 の x 軸に関して対称なので重心は x 軸上にあることが分かります。図 2 のように薄刃状のものにラケットを載せて左右がバランスする位置が重心の位置となります。

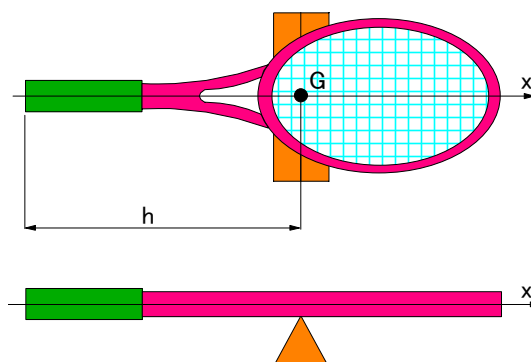


図 2 ラケットの重心

2.3 慣性モーメント

重心まわりの慣性モーメントは、図 3 のようにラケットをグリップエンドで吊り下げて微小振動をさせることで、次式で求めることができます。（Appendix-1 参照）

$$I_G = \frac{MghT^2}{4\pi^2} - Mh^2 \quad (8)$$

ここで、 I_G ：フェイスに平行で重心（点 G）を通る軸まわりの慣性モーメント、 g ：重力の加速度、 h ：グリップ端（点 A）から重心（点 G）までの距離、 T ：フェイスに平行でグリップ端（点 A）を通る軸を中心として微小振動させたときの周期です。

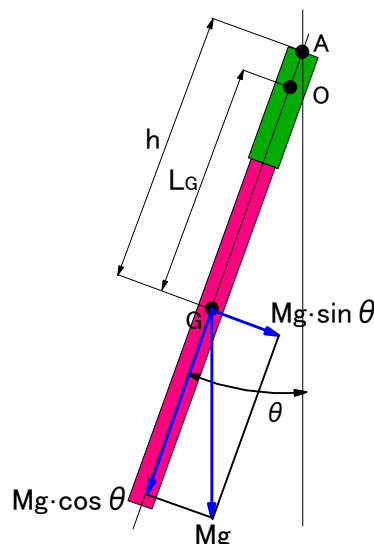


図3 ラケットの慣性モーメントの測定

図3のような構成で、ラケットを微小振動させて周期 T を測定すれば慣性モーメントを知ることができます。

3. 実際の測定

私のラケットで実際に測定してみた結果を以下に示します。私のラケットは、Yonex の V-CON X21 です。

3.1 質量

秤に載せて、質量は 0.293 kg でした。(ガット, 振動止め, グリップテープを含みます)

3.2 重心位置

図4のように、ブックエンドを使い、重心位置を測定しました。大体の位置はすぐに分かりますが、きちんとバランスする位置に止めるのに苦労しました。重心はグリップエンドから 358 mm の位置でした。スロートからフェイスにほんの少し入った位置、左右それぞれ6番目のハトメを結んだ位置でした。ラケットを握ったときの親指と人差し指の付け根の位置がグリップエンドから 75 mm です。したがって、図1の L_G が 283 mm になります。ちなみに全長は 691 mm です。



図4 重心測定

3.3 慣性モーメント

3.3.1 概略計算

実測を行なう前に、ラケットを図5のように、グリップとスロートを断面が長方形の直方体（緑）、フレームを断面が長方形の楕円輪柱（赤）からなるものと仮定して、慣性モーメントの概略計算を行なってみましょう。

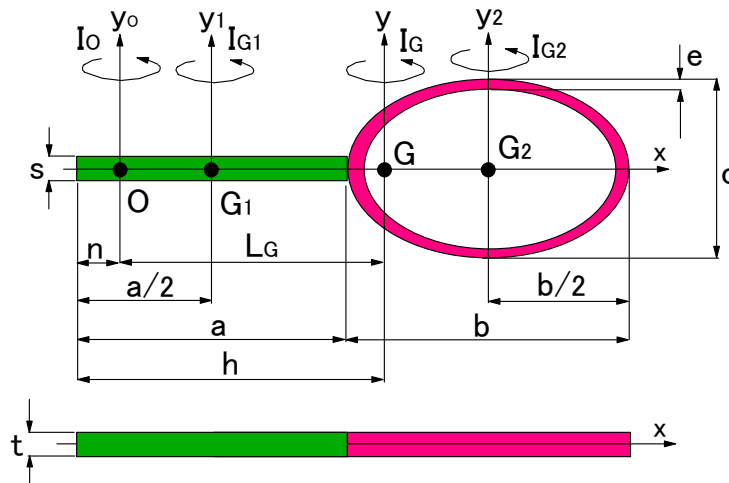


図5 慣性モーメントの概略計算

求める慣性モーメントは、重心（点 G）を通りフェイスに平行な軸（y 軸）まわりの慣性モーメント I_G です。参考に、グリップ位置の中心（点 O）を通りフェイスに平行な軸（ y_0 軸）まわりの慣性モーメント I_O も求めておきます。

まず、グリップ／スロート部を直方体と仮定します。直方体の重心（点 G_1 ）を通りフェイスに平行な軸（ y_1 軸）まわりの直方体の慣性モーメント I_{G1} は Appendix-2 から次式となります。

$$I_{G1} = \frac{\rho ats}{12} (t^2 + a^2) \quad (9)$$

ここで、 ρ ：グリップ／スロート部の密度， a ：グリップ／スロート部の長さ， t ：グリップ／スロート部の厚さ， s ：グリップ／スロート部の幅です。

直方体の質量 M_1 は次式で表されます。

$$M_1 = \rho ats \quad (10)$$

したがって、平行軸の定理から直方体の y 軸まわりの慣性モーメント I_{G1G} 、および y_0 軸まわりの慣性モーメント I_{O1} は次のようになります。

$$I_{G1G} = I_{G1} + \left(h - \frac{a}{2} \right)^2 \rho ats \quad (11)$$

$$I_{O1} = I_{G1} + \left(\frac{a}{2} - n \right)^2 \rho ats \quad (12)$$

ここで、 n ：グリップエンドからグリップを握った位置までの距離です。

次に長軸が b 、短軸が c 、厚さが t の楕円柱の重心（点 G_2 ）を通りフェイスに平行な軸（ y_2 軸）まわりの楕円柱の慣性モーメント I_{G21} は Appendix-3 から次式となります。（まず、ガットもフレームと同一材質であるとして計算し、後で差し引きます）

$$I_{G21} = \frac{\pi\rho bct}{16} \left(\frac{b^2}{4} + \frac{t^2}{3} \right) \quad (13)$$

ここで、密度 ρ はグリップ/スロート部の密度と同じであるとします。

ガットの部分がフレームと同一の材質でできている楕円柱とすると、長軸が $b-2e$ 、短軸が $c-2e$ 、厚さが t ですから、 y_2 軸まわりの慣性モーメント I_{G22} は Appendix-3 から次式となります。

$$I_{G22} = \frac{\pi\rho(b-2e)(c-2e)t}{16} \left(\frac{(b-2e)^2}{4} + \frac{t^2}{3} \right) \quad (14)$$

ここで、 e ：フレームの幅です。

したがって、フレーム（楕円輪柱）の y_2 軸まわりの慣性モーメント I_{G2} は、慣性モーメントの和の定理から次式となります。

$$\begin{aligned} I_{G2} &= I_{G21} - I_{G22} \\ &= \frac{\pi\rho t}{16} \left[bc \left(\frac{b^2}{4} + \frac{t^2}{3} \right) - (b-2e)(c-2e) \left(\frac{(b-2e)^2}{4} + \frac{t^2}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

フレームのみの質量 M_2 は次式で表されます。

$$M_2 = \frac{\pi\rho et}{2} (b+c-2e) \quad (16)$$

平行軸の定理からフレームの y 軸まわりの慣性モーメント I_{G2G} 、および y_O 軸まわりの慣性モーメント I_{O2} は次のようになります。

$$I_{G2G} = I_{G2} + \left(a + \frac{b}{2} - h \right)^2 \frac{\pi\rho et}{2} (b+c-2e) \quad (17)$$

$$I_{O2} = I_{G2} + \left(a + \frac{b}{2} - n \right)^2 \frac{\pi\rho et}{2} (b+c-2e) \quad (18)$$

したがって、慣性モーメントの和の定理から、ラケット全体の y 軸まわりの慣性モーメント I_G 、および y_O 軸まわりの慣性モーメント I_O は次のようになります。

$$I_G = I_{G1G} + I_{G2G} = I_{G1} + \left(h - \frac{a}{2} \right)^2 \rho ats + I_{G2} + \left(a + \frac{b}{2} - h \right)^2 \frac{\pi\rho et}{2} (b+c-2e) \quad (19)$$

$$I_O = I_{O1} + I_{O2} = I_{G1} + \left(\frac{a}{2} - n \right)^2 \rho ats + I_{G2} + \left(a + \frac{b}{2} - n \right)^2 \frac{\pi\rho et}{2} (b+c-2e) \quad (20)$$

以上で、慣性モーメントの概略計算を行なう準備が終わりました。次に実際の計算を行なってみましょう。

【慣性モーメントの概略計算の実際】

Yonex の V-CON X21 について、寸法、質量の測定結果を以下に示します。

$$a = 326 \text{ mm}, \quad b = 365 \text{ mm}, \quad c = 282 \text{ mm}, \quad e = 14 \text{ mm}, \quad n = 75 \text{ mm}, \\ s = 39 \text{ mm}, \quad t = 29 \text{ mm}, \quad \text{質量} : M_1 + M_2 = 0.293 \text{ kg}$$

測定結果から、密度を求めます。長方形部分と楕円輪柱部分の密度は等しいとします。長方形部分と楕円輪柱部分の体積は次のようです。

・長方形部分の体積：

$$V_1 = ats = 326 \times 29 \times 39 = 3.687 \times 10^5 \text{ mm}^3 \quad (21)$$

・楕円輪柱部分の体積：

$$V_2 = (\pi et/2)(b+c-2e) \\ = (\pi \times 14 \times 29/2) \times (365 + 282 - 2 \times 14) = 3.948 \times 10^5 \text{ mm}^3 \quad (22)$$

上記の結果からラケットの密度は次のようになります。

$$\rho = \frac{M_1 + M_2}{V_1 + V_2} = \frac{0.293}{3.687 \times 10^5 + 3.948 \times 10^5} = 3.838 \times 10^{-7} \text{ kg/mm}^3 \quad (23)$$

ラケットの材質は、【HM Graphite + FRTP + Elastomer】とラケットに書いてあります。HM Graphite は高弾性タイプの PAN 系炭素繊維、FRTP (Fiberglass Reinforced Thermo Plastic) はガラス繊維強化熱可塑性樹脂、Elastomer は弾性材です。HM Graphite や FRTP の密度は $2 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ 程度ですから、式(23)の結果は密度が一桁小さくなっています。これは、実際のラケットの面取りや丸みを無視した概略形状で近似したため、式(21)、式(22)の体積が実際より大きくなっているためと思われます。

これらの測定結果から、式(19)および式(20)から慣性モーメント I_G および I_O を計算すると次のようになります。

$$I_G = 1.227 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 = 122.7 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \quad (24)$$

$$I_O = 3.302 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 = 330.2 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \quad (25)$$

参考文献 1 の Chapter 5 に Swingweight として、フェイスに平行でグリップエンドから 101.6 cm (4 in) の位置を通る軸まわりの慣性モーメントが約 $300 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ と出ています。上記計算では、 I_O がグリップ・エンドから 82 mm の軸まわりの慣性モーメントを求めていますから、参考文献 1 と同じ条件にすると、次のように少し小さくなり近い値になります。

$$I_{O\text{参考文献1}} = 3.302 \times 10^4 - (276^2 - 249.4^2) \times 0.293 \\ = 2.893 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 = 289.3 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \quad (26)$$

3.3.1 実測

ゼムクリップを伸ばして輪を作りグリップエンドにセロテープで止めました。輪が極力グリップエンドに近くなるようにしました。図6のように、椅子の間に鉄棒を渡し、鉄棒にゼムクリップの輪を通して、フェイスを図6の手前に引いて手を離し、振動の周期をストップウォッチで測定しました。(近似計算が成り立つように、振り出しの角度を 14° 程度にしました。Appendix-2 を参照ください)



図6 慣性モーメントの測定

4回測定し、測定結果は次の表のようでした。

周期の測定	
振動回数	周 期
5回	6.78 sec / 5回 = 1.36 sec
5回	6.88 sec / 5回 = 1.38 sec
10回	13.85 sec / 10回 = 1.39 sec
10回	13.78 sec / 10回 = 1.38 sec
平均	1.378sec

式(8)に、 $M = 0.293 \text{ kg}$ 、 $g = 9800 \text{ mm/s}^2$ 、 $h = 358 \text{ mm}$ 、 $T = 1.378 \text{ sec}$ を代入すると、フェイスに平行で重心を通る軸まわりの慣性モーメント I_G は次のようになります。これは概略計算の式(24)とほぼ一致しています。

$$I_G = \frac{0.293 \times 9800 \times 358 \times 1.378^2}{4\pi^2} - 0.293 \times 358^2 \quad (27)$$

$$= 1.189 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 = 118.9 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$$

平行軸の定理からグリップを握った位置の中心を通りフェイスに平行な軸まわりの慣性モーメント I_O は次のようになります。

$$I_O = I_G + L_G^2 M \quad (28)$$

$$= 1.189 \times 10^4 + 283^2 \times 0.293 = 3.536 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 = 353.6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$$

3.4 スイートスポット (COP) の計算

ここまででスイートスポット (COP) の計算に必要な情報がすべて揃いました。以下に必要な情報をまとめておきます。

- ・ ラケットの質量 : $M = 0.293 \text{ kg}$
- ・ グリップを握った位置からラケットの重心までの距離 : $L_G = 283 \text{ mm}$
- ・ フェイスに平行でラケット重心を通る軸まわりの慣性モーメント :
 $I_G = 1.189 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$ (実測値を使います)

上記を式(8)に代入すると、グリップを握った位置からスイートスポット (COP) までの距離 r は次のようになります。図7の10円玉の位置がスイートスポット (COP) です。フェイスのほぼ中心部になります。グリップエンドから握る位置の中心までが 75 mm ですから、グリップエンドからスイートスポット (COP) までの距離は 501.4 mm になります。

$$r = \frac{1.189 \times 10^4}{0.293 \times 283} + 283 = 426.4 \text{ mm} \quad (29)$$

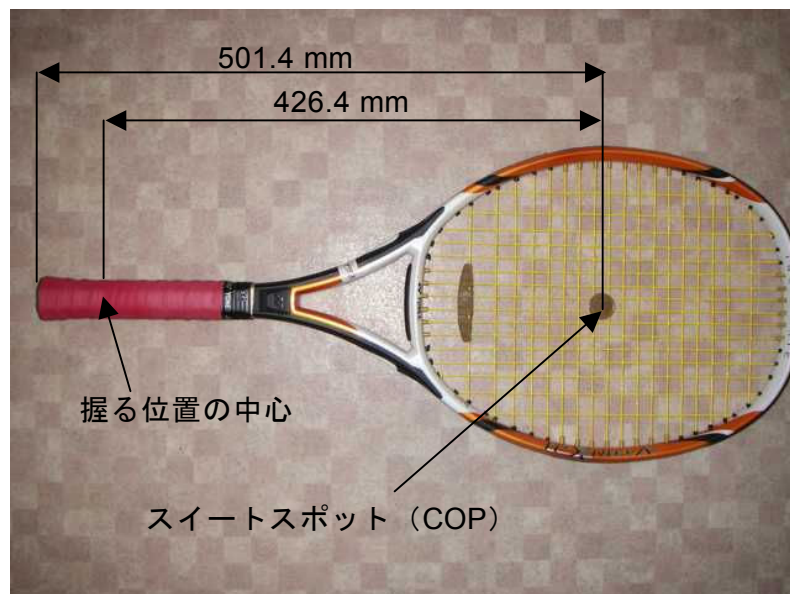


図7 スイートスポット (COP) の位置

ラケットを長くもつ (n を小さくする) とスイートスポット (COP) はグリップ・エンド側にずれ、短く (n を大きくする) とスイートスポット (COP) はヘッド側にずれます。

長いこと計算し、実測もしましたが、スイートスポット (COP) の位置は、見た目でもフェイスの中心付近でした。(笑)

参考文献

1. Howard Brody, Rod Cross, Crawford Lindsey, The physics and technology of tennis, Racquet Tech Publishing, 2007

Appendix-1 慣性モーメントの測定

図3で鉛直線に対する振れ角を θ 、ラケットの質量を M 、グリップエンド（点A）から重心（点G）までの距離を h 、フェイスに平行でグリップエンド（点A）を通る軸まわりの慣性モーメントを I_A とすると次の式が成り立ちます。

$$I_A \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh \sin \theta \quad (\text{Ap1-1})$$

振れ角 θ が小さいとすると、 $\sin \theta \cong \theta$ と近似でき、式(Ap1-1)は次式となります。

$$I_A \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\theta \quad (\text{Ap1-2})$$

式(Ap1-2)の微分方程式を解きます。 $\theta = e^{\lambda \cdot t}$ (λ は定数)とにおいて、式(Ap1-2)に代入すると次式が得られます。

$$I_A \lambda^2 e^{\lambda \cdot t} = -Mghe^{\lambda \cdot t} \quad (\text{Ap1-3})$$

式(Ap1-3)から次式が得られます。

$$\lambda = \pm j \sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \quad (\text{Ap1-4})$$

すなわち、振れ角は次式となります。

$$\theta = e^{j\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t} \quad \text{または} \quad \theta = e^{-j\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t} \quad (\text{Ap1-5})$$

式(Ap1-5)が式(Ap1-2)の解であるならば、この二つの解の任意の線形結合である次式も解になります。

$$\theta = C_1 e^{j\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t} + C_2 e^{-j\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t} \quad (C_1, C_2 \text{は定数}) \quad (\text{Ap1-6})$$

式(Ap1-6)を変形して次式が得られます。

$$\begin{aligned} \theta &= C_1 \left[\cos\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t\right) + j \sin\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t\right) \right] + C_2 \left[\cos\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t\right) - j \sin\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t\right) \right] \\ &= (C_1 + C_2) \cos\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t\right) + j(C_1 - C_2) \sin\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t\right) \\ &\equiv a \cdot \cos \alpha \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t\right) - a \cdot \sin \alpha \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t\right) \\ &= a \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I_A}} \cdot t + \alpha\right) \end{aligned} \quad (\text{Ap1-7})$$

ここで、次のようにおいています。

$$C_1 + C_2 = a \cdot \cos \alpha \quad (\text{Ap1-8})$$

$$j(C_1 - C_2) = -a \cdot \sin \alpha \quad (\text{Ap1-9})$$

式(Ap1-7)は周期 T が次式で表される単振動になります。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{Mgh}} \quad (\text{Ap1-10})$$

したがって、フェイスに平行でグリップエンド（点 A）を通る軸まわりの慣性モーメントは次式となります。

$$I_A = \frac{MghT^2}{4\pi^2} \quad (\text{Ap1-11})$$

平行軸の定理からフェイスに平行で重心（点 G）を通る軸まわりの慣性モーメント I_G は次式となります。

$$I_G = I_A - Mh^2 = \frac{MghT^2}{4\pi^2} - Mh^2 \quad (\text{Ap1-12})$$

微小振動とはどの程度か考えてみましょう。式(Ap1-1)から式(Ap1-2)を導くときに、振れ角 θ は小さいとして、 $\sin \theta \cong \theta$ と近似しました。この近似が成立つのはどの程度の振れ角でしょう。

図 Ap1-1 に横軸 θ （単位は deg）、縦軸 $\sin \theta$ と θ （単位は rad）のグラフを示しました。これを見ると、 $\theta < 14^\circ$ であれば $\sin \theta \cong \theta$ の近似が成立つようです。

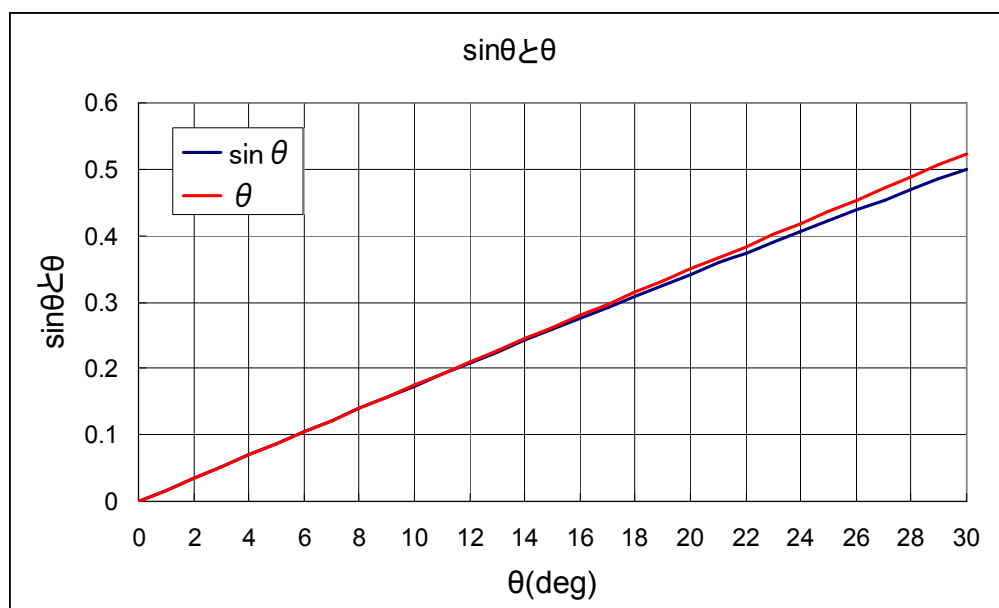


図 Ap1-1 $\sin \theta$ と θ

Appendix-2 直方体の慣性モーメント

ラケットのグリップとスロートの部分を図 Ap2-1 のような直方体（図 5 の緑の部分）として慣性モーメントを求めてみます。

直方体の密度を ρ とすると、重心 G を座標の原点として、座標 (x, y, z) にある微小直方体の質量は $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ になります。微小直方体から z 軸までの距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ です。したがって、 z 軸まわりの慣性モーメント I_z は次式で表すことができます。

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_{-s/2}^{s/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-t/2}^{t/2} \rho(x^2 + y^2) dx = \rho \int_{-s/2}^{s/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} dy \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-t/2}^{t/2} \\
 &= \rho \int_{-s/2}^{s/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{t^3}{12} + ty^2 \right) dy = \rho \int_{-s/2}^{s/2} dz \left[\frac{t^3}{12} y + \frac{ty^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} \quad (\text{Ap2-1}) \\
 &= \rho \int_{-s/2}^{s/2} \frac{at}{12} (t^2 + a^2) dz = \frac{\rho at}{12} (t^2 + a^2) \left[z \right]_{-s/2}^{s/2} \\
 &= \frac{\rho ats}{12} (t^2 + a^2)
 \end{aligned}$$

直方体の質量 M は次式で得られます。

$$M = \rho ats \quad (\text{Ap2-2})$$

したがって、慣性モーメント I_z は次のように表すこともできます。

$$I_z = \frac{M}{12} (t^2 + a^2) \quad (\text{Ap2-3})$$

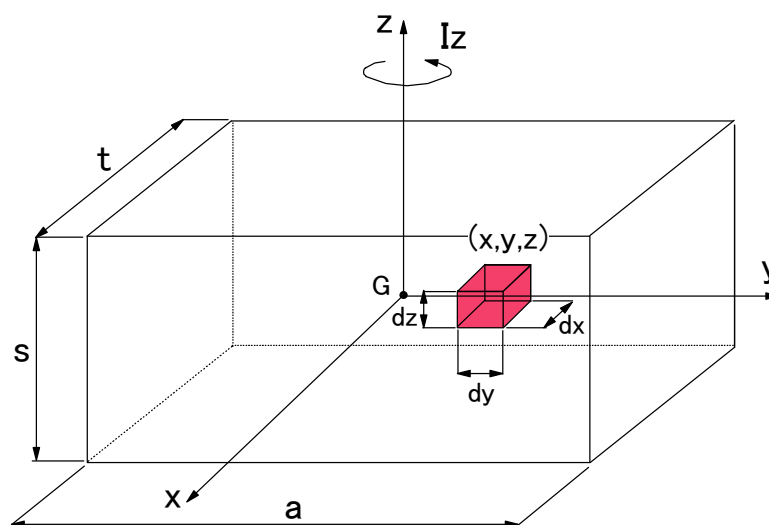


図 Ap2-1 直方体の慣性モーメント

Appendix-3 楕円柱の慣性モーメント

ラケットのフェイスの部分を図 Ap3-1 のような楕円柱（図 5 の赤の部分）として慣性モーメントを求めてみます。

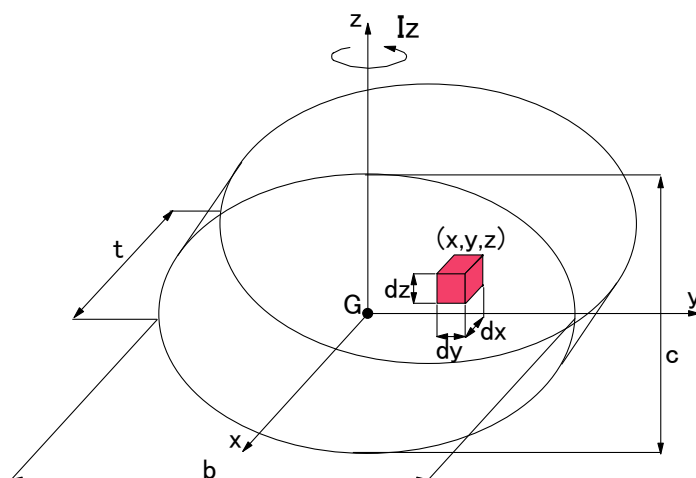


図 Ap3-1 楕円柱の慣性モーメント

楕円柱の密度を ρ とすると、重心 G を座標の原点として、座標 (x, y, z) にある微小直方体の質量は $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ になります。微小直方体から z 軸までの距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ です。

直方体と違い、積分の範囲が簡単ではありません。 x 軸方向（厚さ方向）は、 $-t/2$ から $t/2$ であることは容易に分かりますね。 yz 平面で長軸（ y 軸方向）の長さが b 、短軸（ z 軸方向）の長さが c である楕円の方程式は次のようになります。

$$\frac{y^2}{(b/2)^2} + \frac{z^2}{(c/2)^2} = 1 \quad (\text{Ap3-1})$$

式(Ap3-1)を y について解いて次式が得られます。

$$y = \pm \frac{b}{c} \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2} \equiv \pm h \quad (\text{Ap3-2})$$

したがって、 z 軸まわりの慣性モーメント I_z は次式で表すことができます。

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-h}^h dy \int_{-t/2}^{t/2} \rho (x^2 + y^2) dx = \rho \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-h}^h dy \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-t/2}^{t/2} \\
 &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-h}^h \left(\frac{t^3}{12} + ty^2 \right) dy = \rho \int_{-c/2}^{c/2} dz \left[\frac{t^3}{12} y + \frac{ty^3}{3} \right]_{-h}^h \quad (\text{Ap3-3}) \\
 &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \left[\frac{bt}{6c} (b^2 + t^2) \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2} - \frac{2b^3 t}{3c^3} z^2 \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2} \right] dz \\
 &= \frac{\rho bt}{6c} (b^2 + t^2) \int_{-c/2}^{c/2} \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2} dz - \frac{2\rho b^3 t}{3c^3} \int_{-c/2}^{c/2} z^2 \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2} dz
 \end{aligned}$$

無理関数の積分公式集によると、式(Ap3-3)右辺の積分は次式ようになります。

$$\begin{aligned}
 \int_{-c/2}^{c/2} \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2} dz &= \frac{1}{2} \left[z \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \sin^{-1}\left(\frac{2z}{c}\right) \right]_{-c/2}^{c/2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &\frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \sin^{-1}(1) \\ &+ \left(\frac{c}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \sin^{-1}(-1) \end{aligned} \right] \quad (\text{Ap3-4}) \\
 &= \frac{\pi \cdot c^2}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-c/2}^{c/2} z^2 \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2} dz &= \frac{1}{8} \left[-2z \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2 \right)^{3/2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 z \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2} + \left(\frac{c}{2}\right)^4 \sin^{-1}\left(\frac{2z}{c}\right) \right]_{-c/2}^{c/2} \\
 &= \frac{1}{8} \left[\begin{aligned} &-c \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \right)^{3/2} + \left(\frac{c}{2}\right)^3 \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \left(\frac{c}{2}\right)^4 \sin^{-1}(1) \\ &-c \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \right)^{3/2} + \left(\frac{c}{2}\right)^3 \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \left(\frac{c}{2}\right)^4 \sin^{-1}(-1) \end{aligned} \right] \quad (\text{Ap3-5}) \\
 &= \frac{\pi \cdot c^4}{128}
 \end{aligned}$$

式(Ap3-4)と式(Ap3-5)を式(Ap3-3)に代入して、慣性モーメント I_z は次のようになります。

$$\begin{aligned}
 I_z &= \frac{\rho b t}{6c} (b^2 + t^2) \frac{\pi c^2}{8} - \frac{2\rho b^3 t}{3c^3} \frac{\pi c^4}{128} = \frac{\pi \rho b c t}{48} (b^2 + t^2) - \frac{\pi \rho b^3 c t}{192} \\
 &= \frac{\pi \rho b^3 c t}{48} + \frac{\pi \rho b c t^3}{48} - \frac{\pi \rho b^3 c t}{192} = \frac{\pi \rho b^3 c t}{64} + \frac{\pi \rho b c t^3}{48} = \frac{\pi \rho b c t}{16} \left(\frac{b^2}{4} + \frac{t^2}{3} \right)
 \end{aligned}
 \tag{Ap3-6}$$

楕円柱の質量 M は次式で得られます。

$$M = \frac{\pi \rho b c t}{4}
 \tag{Ap3-7}$$

したがって、慣性モーメント I_z は次のように表すこともできます。

$$I_z = \frac{M}{4} \left(\frac{b^2}{4} + \frac{t^2}{3} \right)
 \tag{Ap3-8}$$

以上